Matemática Discreta I Convocatoria extraordinaria	1^{er} Apellido: ______________________	21 de junio de 2019
	2^{o} Apellido: ______________________	Tiempo 2,5 horas
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______________________ Número de matrícula:	**Nota:**

Ejercicio 1 (15 puntos)

Resuelve la siguiente relación de recurrencia lineal no homogénea: $\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 2 \cdot 5^n, \forall n \geq 2 \\ a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \end{cases}$

Solución:

- Ecuación característica: $x^2 - 10x + 25 = 0$, con raíz doble $x = 5$
- Solución general de la relación homogenea asociada: $h(n) = (k_1 + k_2 n)5^n$
- Solución particular de la recurrencia inicial: $p(n) = An^2 5^n$, con $A = 1$
- Solución general de la relación no homogénea: $a(n) = h(x) + p(n) = (k_1 + k_2 n + n^2)5^n$
- Aplicando las condiciones iniciales: $k_1 = 3$ y $k_2 = -3$, por lo que la solución final es $\boxed{a(n) = (3 - 3n + n^2)5^n}$

Ejercicio 2

a) (10 puntos) Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1100, 1110, 0100, 1111, 0111, 1011, 1000, 0000\}$. Resuelve utilizando el método de Quine McCluskey.

b) (5 puntos) La luz de cruce de un coche se enciende cuando el interruptor de la luz está en "modo encendido", o cuando el interruptor de la luz está en "modo automático", el coche está arrancado y el sensor de visibilidad indica que no hay luz suficiente. Teniendo en cuenta que el interruptor de la luz del coche sólo puede estar en dos estados "modo encendido" y "modo automático", que el coche puede estar detenido o arrancado, y que el sensor de visibilidad puede indicar que hay o no luz suficiente. Encuentra la tabla de verdad de la función booleana que describe el funcionamiento del sistema de luz de cruce del coche, y obtén una expresión booleana para dicha función.

Solución:

a)

* 0000		* 0-00		
* 0100		* -000		
* 1000		* -100		
* 1100	⇒	* 1-00	⇒	--00
* 1110		11-0		~~-00~~
* 0111		111-		
* 1011		-111		
* 1111		1-11		

	1100	1110	0100	1111	0111	1011	1000	0000
11-0	X	X						
111-		X		X				
-111				X	X			
1-11				X		X		
--00	X		X				X	X

$f(x, y, z, t) = z't' + yzt + xzt + xyt' = z't' + yzt + xzt + xyz$

b) Utilizamos 3 variables, x para interruptor de la luz de cruce: $x = 0$ modo automático, $x = 1$ modo encendido; y para el sensor de arranque: $y = 0$ coche detenido, $y = 1$ coche arrancado; y z para el sensor de

visibilidad: $z = 0$ hay luz suficiente, $z = 1$ no hay luz suficiente.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x,y,z) = x'yz + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz = x'yz + x = yz + x$

Ejercicio 3

a) (10 puntos) Calcula el resto de dividir 1078^{92} entre 27.

b) (15 puntos) Encuentra las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones en congruencias:

$$\begin{cases} 5x \equiv 11 (\text{mod } 4!) \\ 7x \equiv 1 (\text{mod } 9) \end{cases}$$

Solución:

a)

- $1078^{92} \equiv 25^{92} (\text{mod } 27)$
- $25^{\phi(27)} \equiv 1 (\text{mod } 27)$ puesto que $\text{mcd}(25, 27) = 1$
- $\phi(27) = \phi(3^3) = 3^3 - 3^2 = 18$, luego $25^{18} \equiv 1 (\text{mod } 27)$
- $25^{92} \equiv 25^{5\cdot 18+2} \equiv (25^{18})^5 25^2 \equiv 25^2 \equiv 625 \equiv \boxed{4 (\text{mod } 27)}$

b)

$$\begin{cases} 5x \equiv 11 & (\text{mod } 24) \\ 7x \equiv 1 & (\text{mod } 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 7 & (\text{mod } 24) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 9) \end{cases}$$

El sistema tiene solución puesto que $mcd(24, 9) | (7 - 4)$

$$\begin{cases} x \equiv 7 & (\text{mod } 24) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 7 & (\text{mod } 2^3) \\ x \equiv 7 & (\text{mod } 3) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 3^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 7 & (\text{mod } 8) \\ \cancel{x \equiv 7} & (\text{mod } 3) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 9) \end{cases}$$

$x = 7 \cdot 9 \cdot [9]_8^{-1} + 4 \cdot 8 \cdot [8]_9^{-1} + 8 \cdot 9t = 7 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 72t = 319 + 72t = [31]_{72}$

Ejercicio 4

Un jardinero encargado del mantenimiento de un jardín debe seleccionar nuevas plantas para su posterior colocación en dicho jardín. Razona las siguientes opciones, y desarrolla las fórmulas utilizadas.

a) (5 puntos) ¿De cuántas formas diferentes el jardinero podría elegir de su vivero un conjunto de 40 hortensias de entre los cuatro colores siguientes: azul, blanco, rojo y amarillo, eligiendo al menos una planta de cada color?

b) (5 puntos) Sabiendo que hay 12 plantas de hortensias, 10 plantas de rosales, 8 plantas de geranios y 6 plantas de claveles, ¿de cuántas formas diferentes el jardinero podría elegir 5 plantas de cada uno de los cuatro tipos anteriores?

c) (5 puntos) ¿De cuántas formas diferentes el jardinero podría plantar en fila un grupo de 10 geranios rojos y 6 claveles blancos de manera que no hubiera dos plantas de claveles consecutivos?

d) (5 puntos) ¿De cuántas formas diferentes el jardinero podría plantar en fila un grupo de 12 rosales si

hay 3 plantas de cada uno de los colores rojo, blanco, amarillo y rosa?

Solución:

a) $CR_{4,36} = \binom{39}{3} = \dfrac{39!}{3!36!}$

b) $\binom{12}{5}\binom{10}{5}\binom{8}{5}\binom{6}{5} = \dfrac{12!}{5!7!}\dfrac{10!}{5!5!}\dfrac{8!}{5!3!}\dfrac{6!}{5!}$

c) $C_{11,6} = \binom{11}{6} = \dfrac{11!}{6!5!}$ o $CR_{7,5} = \binom{11}{5} = \dfrac{11!}{5!6!}$

d) $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \dfrac{12!}{(3!)^4}$

Ejercicio 5

a) (5 puntos) Obtén el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(D_{5499})$, donde D_{5499} es el conjunto de todos los divisores positivos de 5499.

b) (15 puntos) Sea $D_{5^3 \cdot 7^3}$ el conjunto de todos los divisores positivos de $5^3 \cdot 7^3$, y sea $|$ la relación de divisibilidad; es decir, $a|b$ significa que "a divide a b".

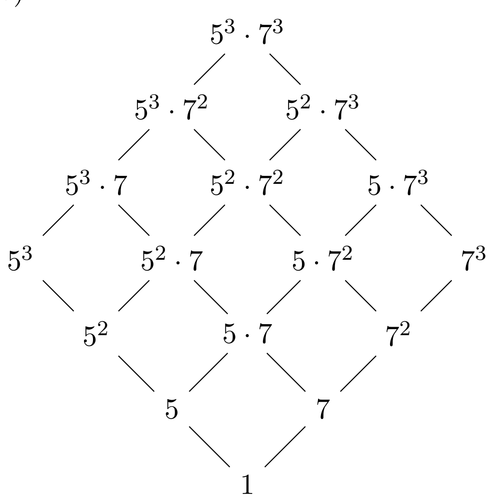
- Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{5^3 \cdot 7^3}, |)$.
- Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{5 \cdot 7, 5^2 \cdot 7, 5 \cdot 7^3\}$.
- Razona si 5^2 y 5^3 tienen o no complementario en $D_{5^3 \cdot 7^3}$. En caso afirmativo obtén el complementario.
- Razona si $(D_{5^3 \cdot 7^3}, |)$ es un álgebra de Boole.

c) (5 puntos) Dada en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia siguiente: aRb si $17|(a-b)$. Describe por extensión el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Z} : aR(-57) \text{ y } -47 \leq a \leq 47\}$.

Solución:

a) $5499 = 3^2 \cdot 13 \cdot 47$, $\mathcal{P}(D_{5499}) = 2^{12}$

b)



- Cotas superiores: $\{5^2 \cdot 7^3, 5^3 \cdot 7^3\}$
- Cotas inferiores: $\{1, 5, 7, 5 \cdot 7\}$
- Supremo: $5^2 \cdot 7^3$
- Ínfimo: $5 \cdot 7$
- Máximo: no hay
- Mínimo: $5 \cdot 7$
- Maximales: $\{5^2 \cdot 7, 5 \cdot 7^3\}$

- Minimales: $5 \cdot 7$

El elemento 5^2 no tiene complementario, y el complementario del elemento 5^3 es 7^3.

$(D_{5^3 \cdot 7^3}, |)$ es retículo, pero no es álgebra de Boole dado que no todos sus elementos tienen complementario.

c) $\{-40, -23, -6, 11, 28, 45\}$